第１問【解答】

Ⅰ(１)　(ア) $\boxed{v_x}$　　(イ) $\boxed{v_y}$　　(ウ) $\boxed{a_x}$　　(エ) $\boxed{a_y}$　　(オ) $\boxed{a_y}$　　(カ) $\boxed{a_x}$

(２)　面積速度が変化しない条件に運動方程式を用いて

$$\Delta A_v = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}(xa_y - ya_x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{a_y}{a_x} = \frac{y}{x} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\frac{F_y}{F_x} = \frac{y}{x}}$$

(３)　(２)の力は円の中心に向かう力で，常に速度ベクトルに対して垂直にはたらく。

この力による仕事率は軌道上のどの点でも０であるから，$\boxed{\text{いずれも０で等しい}}$。

Ⅱ(１)　小球の運動エネルギーを K とおくと

$$K - K_r = \frac{1}{2}m\left(v_x{}^2 + v_y{}^2\right) - \frac{1}{2}m\left(\frac{xv_x + yv_y}{r}\right)^2$$

$r^2 = x^2 + y^2$ に注意して変形すると

$$K - K_r = \frac{m}{2r^2}\left\{\left(x^2 + y^2\right)\left(v_x{}^2 + v_y{}^2\right) - \left(xv_x + yv_y\right)^2\right\}$$

$$= \frac{m}{2r^2}\left(xv_y - yv_x\right)^2 = \boxed{\frac{2mA_v{}^2}{r^2}}$$

(２)　Ⅱ(１)の結果を用いて，力学的エネルギー E を変形すると

$$E = K - G\frac{Mm}{r} = K_r + \frac{2mA_0{}^2}{r^2} - G\frac{Mm}{r} = K_r + 2mA_0{}^2\left(\frac{1}{r} - \frac{GM}{4A_0{}^2}\right)^2 - \frac{m(GM)^2}{8A_0{}^2}$$

ここで，$K_r = \dfrac{1}{2}mv_r{}^2$ は，動径方向速度 $v_r = 0$ となる円運動のとき最小値０をとる。

したがって，$\boxed{\text{半径 } r = \dfrac{4A_0{}^2}{GM} \text{ の円運動}}$のとき，$\boxed{\text{最小値 } E_{\min} = -\dfrac{m(GM)^2}{8A_0{}^2}}$となる

Ⅲ(１)　円運動の運動方程式より

$$m\frac{v^2}{r}=G\frac{Mm}{r^2} \qquad \therefore v=\sqrt{\frac{GM}{r}}$$

量子条件の式にvを代入して整理すると

$$2\pi r=\frac{nh}{m}\sqrt{\frac{r}{GM}} \qquad \therefore r=\boxed{\frac{n^2}{GMm^2}\left(\frac{h}{2\pi}\right)^2}$$

(２)　Ⅲ(１)において$r=R, n=1$としてmについて整理して，与えられた数値を代入すると

$$m=\frac{h}{2\pi}\frac{1}{\sqrt{GMR}}=\boxed{10^{-61}[\mathrm{kg}]}$$

第２問【解答】

Ｉ(１) (ア) $\boxed{dIB}$ (イ) $\boxed{下}$ (ウ) $\boxed{X}$ (エ) $\boxed{V=V_0}$ (オ) $\boxed{\dfrac{V_0}{Bd}}$

(２) 導体棒の運動量変化と力積の関係から

$$m\Delta s = dIB\Delta t \qquad \Leftrightarrow \qquad \Delta s = \boxed{\frac{Bd}{m}I\Delta t}$$

したがって，この間に導体棒に生じる誘導起電力の変化分は

$$\Delta sBd = \boxed{\frac{(Bd)^2}{m}I\Delta t}$$

(３) 電流の定義より，Δt の間に導体棒を通過する電気量 ΔQ は　$\Delta Q = I\Delta t$　をみたす。

よって，Ｉ(２)で得られた関係式を書き替えると　$\Delta Q = \dfrac{m}{Bd}\Delta s$

到達速さまでの速さの変化量は $\dfrac{V_0}{Bd}$ であるから，この間に通過した電気量 Q は

$$Q = \frac{m}{Bd}\frac{V_0}{Bd} = \boxed{\frac{mV_0}{(Bd)^2}}$$

(４) (２)の関係式は起電力の変化分 ΔV と通過した電気量 ΔQ の間に $C = \dfrac{m}{(Bd)^2}$ として

$$\Delta Q = \frac{m}{(Bd)^2}\Delta V = C\Delta V$$

の関係が成立することを表す。この変化していく電位差 V に逆らって電荷を運ぶ仕事は

静電容量 C のコンデンサーを電位差 V_0 まで充電するための仕事と等しい。よって

$$\frac{1}{2}CV_0{}^2 = \frac{mV_0{}^2}{2(Bd)^2} = \boxed{\frac{1}{2}ms_0{}^2}$$

(５) 回路と導体棒のエネルギー収支より

$\boxed{導体棒の運動エネルギー変化に\dfrac{1}{2}ms_0{}^2}$

$\boxed{抵抗で発生したジュール熱に\dfrac{1}{2}ms_0{}^2}$

Ⅱ　(カ)(キ)長さ d での到達速さを v_1，長さ $2d$ での到達速さを v_2 とおく。

$$V_0 = v_1 Bd = v_2 B(2d) \quad \Leftrightarrow \quad v_2 = \frac{1}{2} v_1$$

(ク)　スイッチを切った状態では電流が流れないので，速度は変化しない

(ケ)　端子間の距離が２倍になるので，同じ速さに対して起電力は２倍になる

(カ) $\boxed{\dfrac{1}{2}}$　(キ) $\boxed{1}$　(ク) $\boxed{1}$　(ケ) $\boxed{2}$

Ⅲ　導体棒１，２の到達速さをそれぞれ v_1, v_2 とおくと，回路の方程式より

$$V_0 = v_1 Bd + v_2 B(2d)$$

スイッチを閉じてから到達速さになるまでの加速中，導体棒に流れる電流は共通で，長さの違いにより，導体棒２は導体棒１の２倍の力が働き，２倍の加速度が生じる。よって

$$v_2 = 2v_1$$

以上の２式より　$v_1 = \boxed{\dfrac{V_0}{5Bd}}$　$v_2 = \boxed{\dfrac{2V_0}{5Bd}}$

第３問【解答】

Ⅰ　操作１は断熱膨張　$W_1 = \Delta U_1 = U_{\mathrm{B}} - U_{\mathrm{A}} = \boxed{\dfrac{3}{2}\left(\dfrac{1}{a^2} - 1\right)RT_{\mathrm{A}}}$

操作２は定圧変化　$W_2 = P(V_{\mathrm{B}} - V_{\mathrm{C}}) = \boxed{\left(\dfrac{1}{a^2} - \dfrac{4}{5}\right)RT_{\mathrm{A}}}$

操作３は断熱圧縮　$W_3 = \Delta U_3 = U_{\mathrm{D}} - U_{\mathrm{C}} = \boxed{\dfrac{6}{5}(a^2 - 1)RT_{\mathrm{A}}}$

Ⅱ　操作４は定圧変化

（１）　$\Delta U_4 = U_{\mathrm{E}} - U_{\mathrm{D}} = \boxed{\dfrac{3}{2}R(T_{\mathrm{E}} - T_{\mathrm{D}})}$

（２）　操作４でＸ内の気体が吸収した熱は，定圧モル比熱を用いて

$$Q_4 = \frac{5}{2}R(T_{\mathrm{E}} - T_{\mathrm{D}})$$

熱力学第一法則より

$$W_4 = \Delta U_4 - Q_4 = \boxed{R(T_{\mathrm{D}} - T_{\mathrm{E}})}$$

（３）　ＸとＹからなる系に対する熱力学第一法則より

$$\Delta U_Y + \Delta U_4 = W_4 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{3}{2}R(T_{\mathrm{E}} - T_{\mathrm{A}}) + \frac{3}{2}R(T_{\mathrm{E}} - T_{\mathrm{D}}) = R(T_{\mathrm{D}} - T_{\mathrm{E}})$$

これを解いて　$T_{\mathrm{E}} = \boxed{\dfrac{3}{8}T_{\mathrm{A}} + \dfrac{5}{8}T_{\mathrm{D}}}$

Ⅲ(１)　操作４でＹの気体が熱を吸収するときＸの気体は熱を放出する。

よって，操作４は定圧変化で体積が減少する。

また操作４でＹの気体が熱を吸収して温度が上昇するとき$T_{\mathrm{E}} > T_{\mathrm{A}}$より$V_{\mathrm{E}} > V_{\mathrm{A}}$

したがって適当なグラフは　$\boxed{\text{オ}}$

(２)　操作４でＹの温度が上昇する条件を考えて

$$T_{\mathrm{E}} > T_{\mathrm{A}} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{3}{8}T_{\mathrm{A}} + \frac{5}{8}T_{\mathrm{D}} > T_{\mathrm{A}} \quad \Leftrightarrow \quad T_{\mathrm{D}} > T_{\mathrm{A}} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{4}{5}a^2 > 1 \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{a > \frac{\sqrt{5}}{2}}$$

(３)　操作１から操作４の全体で，容器Ｘと容器Ｙに外部から与えられたエネルギーは

容器Ｘの気体がされた仕事W　と　容器Ｚから受け取った熱Q_2

これにより容器Ｘと容器Ｙの内部の気体の温度がともにT_{A}からT_{E}に変化した

このエネルギー収支の関係より

$$\frac{3}{2}R(T_E - T_A) + \frac{3}{2}R(T_E - T_A) = W + Q_2 \quad \Leftrightarrow \quad 2\Delta U_Y = W + Q_2$$

したがって　$\Delta U_Y = \boxed{\dfrac{W + Q_2}{2}}$

(４)　容器Ｙの温度が操作４によって変化しなくなる時　$T_{\mathrm{F}} = T_{\mathrm{D}} = \boxed{\dfrac{4}{5}a^2 T_{\mathrm{A}}}$