$f(x) = x^3 - 3ax^2 + b$ とおく。

$f'(x) = 3x(x - 2a)$

より、 $f'(x) = 0 \iff x = 0,\ 2a$

$f(0) = b > 0$ より、 $x = 0$ で $x$ 軸と $C$ が接することはないので、

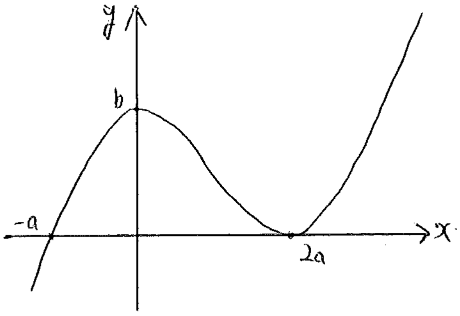
$x = 2a$ で $x$ 軸と $C$ は接する。

したがって、

$$f(2a) = 0 \iff 8a^3 - 12a^3 + b = 0$$

$$\iff b = 4a^3$$

$C$ の概形は以下のようになる。




$y$ 軸上に $x$ 座標、$y$ 座標が整数である点が２つ以上あってはいけないので

$$b \leqq 2 \iff 4a^3 \leqq 2 \qquad \therefore\ 0 < a \leqq 2^{-\frac{1}{3}}$$

よって、 $-a \geqq -2^{-\frac{1}{3}} > -1$ より $x = -1$ 上に $x$ 座標、$y$ 座標が整数

である点は存在しない。 また、

$$f(1) = 1 - 3a + 4a^3$$

であるが、これを $g(a)$ とすると、 $g'(a) = 12a^2 - 3$ より $a \geqq -\frac{1}{2}$ で単調増加

$\frac{1}{2} < 2^{-\frac{1}{3}} < \frac{\sqrt{2}}{2}$ なので、 $0 = g(\frac{1}{2}) \leqq g(2^{-\frac{1}{3}}) < g(\frac{\sqrt{2}}{2}) = 1$ となり、 $x = 1$ 上にも

$x$ 座標、$y$ 座標が整数である点は存在しない。

したがって、 $x$ 座標、$y$ 座標が整数である点は

$y$ 軸上にただ１点のみ存在するので、 $b > 1 \iff 4a^{\frac{3}{2}} > 1$

$$\therefore\ a > 2^{-\frac{2}{3}}$$

以上より、 $b = 4a^3$ ， $2^{-\frac{2}{3}} < a \leqq 2^{-\frac{1}{3}}$ //

(1) 5個の点を選んだときに、選んだ点が1個も含まれない2本の直線が、2本とも$x$軸または$y$軸に平行な場合と、両軸に平行なものが1本ずつの場合とで分けて考える。

(i) $x=a$ から 0本
$y=b$ から 2本

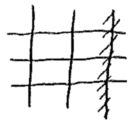
点が含まれない2本の選び方は ${}_4C_2$ 通り、5点は残りの8点から選ぶことになるが、5点が $x=a$ の4本全てに、少なくとも1点ずつ置かなくてはならない。
各$x$に2枠ずつあり、5点が(1,1,1,2)に配分されることを考えると(1,1,1,2)の2を選ぶ ${}_4C_1$ 通りと1点を2枠のどちらに置くかの $2^3$ 通りがそれぞれの場合について考えられる。

$\therefore\ 2^3 \times {}_4C_1 \times {}_4C_2 = 192$ 通り

(ii) $x=a$ から 2本
$y=b$ から 0本
より、(i)と同様に考えればよく、192通り

(iii) $x=a$ から 1本
$y=b$ から 1本
それぞれ ${}_4C_1$ 通り

上記2本上の7点を除く9点に5点を置く。9点のうち、5点を埋めると、点の置かれない直線は0または1本。
余事象として1本の場合を考えて ${}_9C_5$ から除く。

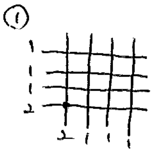


6本のうち、置かれない1本を選び(${}_6C_1$)、残る6点(例、右図)のうち、5点を選ぶ(${}_6C_5$)
よって、求める場合の数は、
$({}_9C_5 - {}_6C_1 \times {}_6C_5) \times {}_4C_1 \times {}_4C_1 = 1440$ 通り

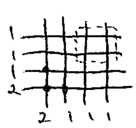
(i)〜(iii)より、重複はないため、
$192 + 192 + 1440$
$= 1824$ 通り

(2) 全ての直線上に点が置かれる。$x=a$ に注目すると、$a=1,2,3,4$ 全てに点が存在することから、5点は各直線に(2,1,1,1)の個数で配分される。同様のことが $y=b$ についても言える。ある$(a,b)$の組に2点ずつ配分されると考える。
この $a, b$ の選び方は、${}_4C_1 \times {}_4C_1$ 通りである。

①



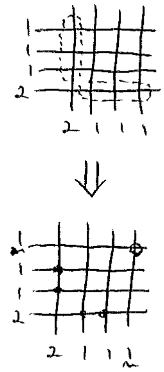

2点置かれる直線同士の交点に置かれる場合。
(図は $a=1, b=1$ を選んだ場合)
2点置かれる $x=a$ に注目すると空いた3点のうち1点が選ばれる。
同様に2点置かれる $y=b$ についても ${}_3C_1$ 通りで点が置かれる。




(例)

3点置いた状態で縦2本、横2本の上に点が置かれていないことになる。全ての直線上に点を置くには、同一直線の組を避けた2通りで置くしかない。

② ①の初め、交点に置かない場合
このとき、右図の点線で囲んだ3点ずつのうち、2点ずつが選ばれる。
この場合の数は ${}_3C_2 \times {}_3C_2$
このように4点を選ぶと、残りの1点を置く場所は1点に定まる。
なぜならば、空いている2本を1点で埋める必要があるためである
(例、右図の白丸)。




以上より、${}_4C_1 \times {}_4C_1 \times (1 \times {}_3C_1 \times {}_3C_1 \times 2 + {}_3C_2 \times {}_3C_2 \times 1) = 432$ 通り

$C: \ y = x^2 - 2x + 4 \quad (x \geqq 0)$

(1) 半直線 OP の通過領域は原点を通る半直線の集合となるため、半直線の傾きのとりうる範囲で領域が決定する。

OP の傾きは、点 P の $x$ 座標が 0 から大きくなるにつれて小さくなり、C と接するときに最小値をとり再度増加する。

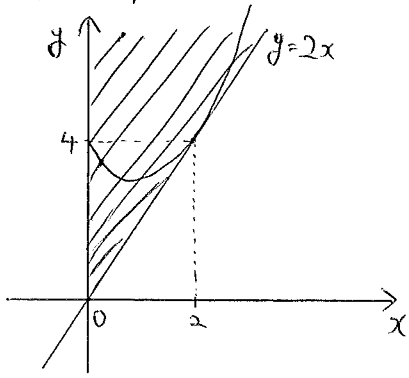
$y = x^2 - 2x + 4 \ (x \geqq 0)$ について $y' = 2(x-1)$ より、接点の $x$ 座標を $p$ とすると、接線の方程式は $y = 2(p-1)(x-p) + p^2 - 2p + 4 = 2(p-1)x + 4 - p^2$

これが原点を通るとき $0 = 4 - p^2$，$p \geqq 0$ より $p = 2$

接線の方程式は $y = 2x$，

求める領域は $y = cx$ の $x \geqq 0$ の部分が通過する部分。ただし、$c \geqq 2$ の実数。

よって、領域は右図の斜線部であり、境界 $x = 0$ と $y = 2x$ の $y \geqq 0$ を含む。




(2) $D(1, 0)$ とおく。$\triangle OAB$ が正三角形になるとき $\angle AOB = \frac{\pi}{3}$ となる。任意の C 上の点 $A(t, t^2 - 2t + 4)\ (t \geqq 0)$ について、$\angle AOB = \frac{\pi}{3}$ となる傾き $a$ を持つ直線を考えれば $\triangle OAB$ が正三角形となる点 B は存在する。

$t = 0$ のとき $A(0, 4)$ で、このとき $B(\pm 2\sqrt{3}, 2)$ となり $a = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$．

$t > 0$ のとき、$\angle AOD = \alpha$，$\angle BOD = \beta$ とすると $\beta = \alpha \pm \frac{\pi}{3}$．

$$\tan\beta = \tan\left(\alpha \pm \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\tan\alpha \pm \sqrt{3}}{1 \mp \sqrt{3}\tan\alpha} = \pm\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{4}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}\tan\alpha \mp 1} \quad (\text{複号同順})$$

(i) $\beta = \alpha - \frac{\pi}{3}$ について、

$\tan\beta = \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{4}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}\tan\alpha + 1}$．(1) より $\tan\alpha \geqq 2$ なので $0 < \frac{1}{\sqrt{3}\tan\alpha + 1} \leqq \frac{1}{2\sqrt{3}+1}$

$\therefore \ \frac{5\sqrt{3} - 8}{11} \leqq \tan\beta < \frac{1}{\sqrt{3}}$．

(ii) $\beta = \alpha + \frac{\pi}{3}$ について、

$\tan\beta = -\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{4}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}\tan\alpha - 1}$．$\tan\alpha \geqq 2$ より $-\frac{5\sqrt{3} + 8}{11} \leqq \tan\beta < -\frac{1}{\sqrt{3}}$

$a = \tan\beta$ なので、以上より $-\frac{5\sqrt{3} + 8}{11} \leqq a \leqq -\frac{1}{\sqrt{3}}$，$\frac{5\sqrt{3} - 8}{11} \leqq a \leqq \frac{1}{\sqrt{3}}$ //

(1) $\{2^0, 2^1, \cdots, 2^{n-1}\}$ から 2個選ぶとき、より大きい方を $2^k$ とする。

このようになるときの和は $2^k \cdot 2^0 + 2^k \cdot 2^1 + \cdots + 2^k \cdot 2^{k-1} = 2^k \sum_{l=0}^{k-1} 2^l$

$1 \leqq k \leqq n-1$ の範囲で $k$ を動かして、

$$a_{n,2} = \sum_{k=1}^{n-1} 2^k \sum_{l=0}^{k-1} 2^l$$
$$= \sum_{k=1}^{n-1} 2^k \cdot (2^k - 1) = \sum_{k=1}^{n-1} (4^k - 2^k)$$
$$= \frac{4}{3}(4^{n-1} - 1) - 2(2^{n-1} - 1) = \underline{\frac{1}{3} \cdot 4^n - 2^n + \frac{2}{3}} \,//$$

(2) $\{2^0, 2^1, \cdots, 2^n\}$ から $k$ 個選ぶとき、最も大きいものを $2^l$ とする。

このようになるものの和は $2^l a_{l,k-1}$ ($\{2^0, \cdots, 2^{l-1}\}$ から $k-1$ 個選びかけ合わせ足すため)

よって、$1 \leqq l \leqq n$ で $l$ を動かして、

$a_{n+1,k} = \sum_{l=1}^{n} 2^l a_{l,k-1}$　、　同様に $a_{n,k} = \sum_{l=1}^{n-1} 2^l \cdot a_{l,k-1}$

よって、$a_{n+1,k} - a_{n,k} = 2^n \cdot a_{n,k-1}$ , $a_{n+1,k} = 2^n a_{n,k-1} + a_{n,k}$

$$f_{n+1}(x) = 1 + \sum_{k=1}^{n} a_{n+1,k} x^k + a_{n+1,n+1} x^{n+1}$$
$$= 1 + a_{n+1,1} x + \sum_{k=2}^{n} (2^n a_{n,k-1} + a_{n,k}) x^k + 2^{\frac{n(n+1)}{2}} \cdot x^{n+1}$$
$$= 1 + (2^{n+1} - 1)x + x \cdot 2^n (f_n(x) - 1 - a_{n,n} x^n) + (f_n(x) - 1 - a_{n,1} x) + 2^{\frac{n(n+1)}{2}} \cdot x^{n+1}$$
$$= 1 + (2^{n+1} - 1)x + x \cdot 2^n \cdot f_n(x) - 2^n x - 2^n \cdot 2^{\frac{n(n-1)}{2}} \cdot x^{n+1} + f_n(x) - 1 - (2^n - 1)x + 2^{\frac{n(n+1)}{2}} \cdot x^{n+1}$$
$$= (2^n \cdot x + 1) \cdot f_n(x)$$

よって、
$$\underline{\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)} = 2^n \cdot x + 1} \,//$$

また、$\{2^0, 2^1, \cdots, 2^n\}$ から $k$ 個選ぶとき、$2^0$ を含むものの和は、

$2^0 \cdot 2^{k-1} \cdot a_{n,k-1}$ となる ($\because \{2 \cdot 2^0, \cdots, 2 \cdot 2^{n-1}\}$ から $k$ 個選んでかけ合わせて足すため)

$2^0$ を含まないものは、$2^0 \cdot 2^k \cdot a_{n,k}$ となる ($\because$ 同様)。

これらより、$a_{n+1,k} = 2^{k-1} a_{n,k-1} + 2^k \cdot a_{n,k}$ ,

$$
\begin{aligned}
f_{n+1}(x) &= 1 + \sum_{k=2}^{n} a_{n+1,k} \cdot x^{k} + a_{n+1,n+1} \cdot x^{n+1} \\
&= 1 + \sum_{k=2}^{n} \left(2^{k-1} \cdot a_{n,k-1} + 2^{k} a_{n,k}\right) \cdot x^{k} + 2^{\frac{n(n+1)}{2}} \cdot x^{n+1} \\
&= 1 + x \sum_{k=2}^{n} a_{n,k-1} (2x)^{k-1} + \sum_{k=2}^{n} a_{n,k} \cdot (2x)^{k} + 2^{\frac{n(n+1)}{2}} \cdot x^{n+1} \\
&= 1 + x\left(f_n(2x) - (2x)^{n} \cdot a_{n,n-1}\right) + \left(f_n(2x) - a_{n,1} \cdot 2x - 1\right) + 2^{\frac{n(n+1)}{2}} \cdot x^{n+1} \\
&= (x+1) f_n(2x)
\end{aligned}
$$

よって、$\dfrac{f_{n+1}(x)}{f_n(2x)} = \underline{x+1}$ //

(3)　(2)より、

$$
\begin{cases}
a_{n+1,k+1} = 2^{n} \cdot a_{n,k} + a_{n,k+1} & \cdots ① \\
a_{n+1,k+1} = 2^{k} \cdot a_{n,k} + 2^{k+1} a_{n,k+1} & \cdots ②
\end{cases}
$$

① × $2^{k+1}$ − ②

$$: \left(2^{k+1} - 1\right) a_{n+1,k+1} = \left(2^{n+k+1} - 2^{k}\right) a_{n,k}$$

$$
\begin{aligned}
\therefore\ a_{n+1,k+1} &= \frac{2^{n+1} - 1}{2^{k+1} - 1} \cdot 2^{k} \\
&= \underline{2^{k} \cdot \frac{2^{n+1} - 1}{2^{k+1} - 1}}
\end{aligned}
$$

//