(1) $a<0$ を仮定すると、$ax^2+bx+c>0$ の実数解は、存在するとしても

$\alpha<x<\beta$　(但し α, β は $ax^2+bx+c=0$ の異なる2実数解)

となり、$x>p$ に反する。

同様に $b<0$、$c<0$ の時も $x>p$ を満たす実数 x の集合と一致しない為、

a, b, c は全て0以上である■

(2) $a>0$ と仮定すると、$ax^2+bx+c>0$ の実数解は、

$x<\alpha$, $\beta<x$ (α, β は(1)と同じ) か、$x \neq \gamma$ (γ は $ax^2+bx+c=0$ の重解) か、全ての実数となり、$x>p$ に反する

同様に考えて、$a>0 \wedge b>0 \wedge c>0$ と仮定すると、与式を全てみたす実数 x の集合と、$x>p$ を満たす実数 x の集合は一致しない。

よって、(1)と以上より、a, b, c のいずれかが0である■

(3) $a \sim c$ のうち0であるものの個数で場合分けする

(i) 0が1つのとき

$a=0$ のときを考える $b>0$、$c>0$ より、

$$\begin{cases} bx+c>0 \\ bx^2+cx>0 \\ cx^2+b>0 \end{cases} \iff \begin{cases} x>-\frac{c}{b} \\ x<-\frac{c}{b},\ x>0 \\ x \text{は任意の実数} \end{cases}$$

3つの不等式を連立すると、$x>0$

(ii) 0が2つのとき

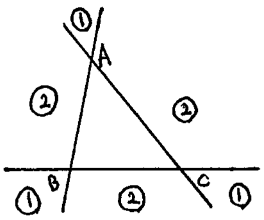
$a=0$、$b=0$ のときを考える。$c>0$ より、

$$\begin{cases} c>0 \\ cx>0 \\ cx^2>0 \end{cases} \iff \begin{cases} x \text{は任意の実数} \\ x>0 \\ x \neq 0 \end{cases}$$

3つの不等式を連立すると、$x>0$

(iii) 0が3つのとき、問題文で与えられた3つの不等式が常に不成立より、不適

(3)　(i) ~ (iii) より，題意を満たすとき，$p=0$ であることが示された．■

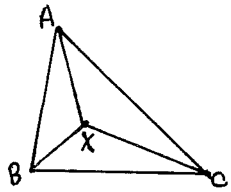


左のように△ABCの外部の領域を分類する。

Xが△ABCの内部，①，②にあるときの3通りに分けて考える。

条件 $2 \leqq \triangle ABX + \triangle BCX + \triangle CAX \leqq 3$ … (*) とおく。

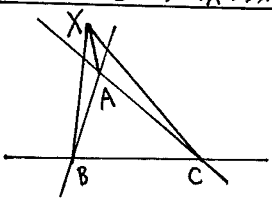
(i) Xが△ABCの内部にあるとき



$\triangle ABX + \triangle BCX + \triangle CAX = \triangle ABC = 1$

となり，(*)を満たさない為 不適。

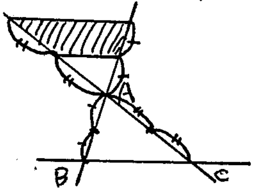
(ii) Xが①の領域にあるとき



$$\triangle ABX + \triangle BCX + \triangle CAX = \triangle ABC + 2(\triangle ABX + \triangle CAX)$$
$$= 1 + 2(\triangle ABX + \triangle CAX)$$

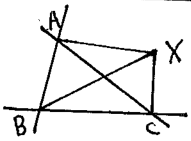
よって (*) $\Leftrightarrow \frac{1}{2} \leqq \triangle ABX + \triangle CAX \leqq 1$

すなわち，XとBCの距離がAとBCの距離の$\frac{3}{2}$倍から2倍の間であればよい。



これを図示すると左の図の斜線部分となり，その面積は相似より$\frac{3}{4}$。これはXが他の①にあるときも同様である。

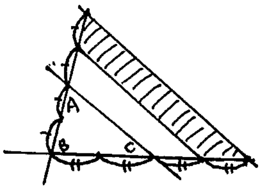
(iii) Xが②の領域にあるとき



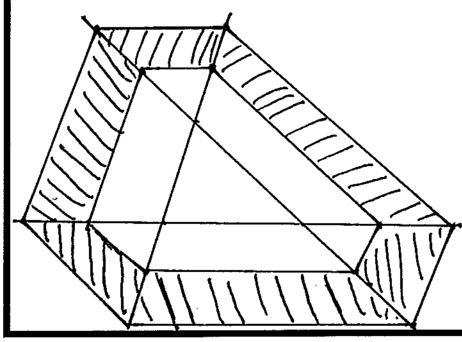
$\triangle ABX + \triangle BCX + \triangle CAX = \triangle ABC + 2\triangle CAX = 1 + 2\triangle CAX$

よって (*) $\Leftrightarrow \frac{1}{2} \leqq \triangle CAX \leqq 1$.

すなわち，XとACの距離がBとACの距離の$\frac{1}{2}$倍から1倍の間であればよい。



これを図示すると左の図の斜線部分になり，その面積は相似より$\frac{7}{4}$。これはXが他の②にあるときも同様である。



以上(i)～(iii)より求める範囲は左の図の斜線部で，その面積は

$$\frac{3}{4} \times 3 + \frac{7}{4} \times 3 = \frac{15}{2}$$ //

(1) $t \neq -1$ より $x(t) \neq 0$, $g(t) := \dfrac{y(t)}{x(t)} = 3(1-t)^{\frac{1}{2}}(1+t)^{-\frac{1}{2}}$ とおくと,

$$g'(t) = 3\cdot\frac{1}{2}(1-t)^{-\frac{1}{2}}\cdot(-1)\cdot(1+t)^{-\frac{1}{2}} + 3(1-t)^{\frac{1}{2}}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot(1+t)^{-\frac{3}{2}}$$

$$= -3(1-t)^{-\frac{1}{2}}(1+t)^{-\frac{3}{2}}$$

$-1<t<1$ において $g'(t)<0$ が常に成り立つ.

従って, $g(t) = \dfrac{y(t)}{x(t)}$ は $-1<t\leqq 1$ において,単調に減少する。

(2)
$$f(t) = \sqrt{\{x(t)\}^2 + \{y(t)\}^2}$$
$$= \sqrt{(1+t)^3 + 9(1+t)^2(1-t)}$$
$$= (1+t)\sqrt{(1+t)+9(1-t)} \quad (\because 1+t \geqq 0)$$
$$= \sqrt{2}(1+t)\sqrt{5-4t}$$
である. したがって,

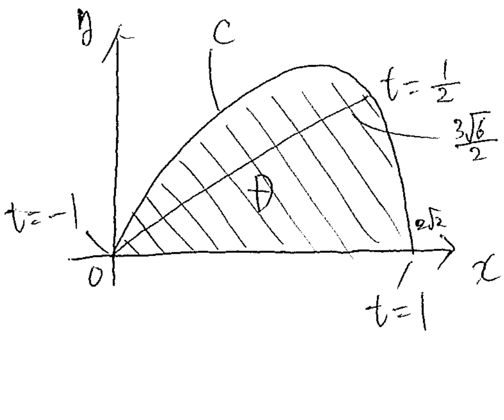
$$f'(t) = \sqrt{2}\left\{\sqrt{5-4t} + (1+t)\cdot\frac{-2}{\sqrt{5-4t}}\right\}$$
$$= 3\sqrt{2}\cdot\frac{1-2t}{\sqrt{5-4t}}$$
であるから, 増減表は以下のようになる。

t	-1	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	1
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$	0	$\nearrow$	最大	$\searrow$	$2\sqrt{2}$

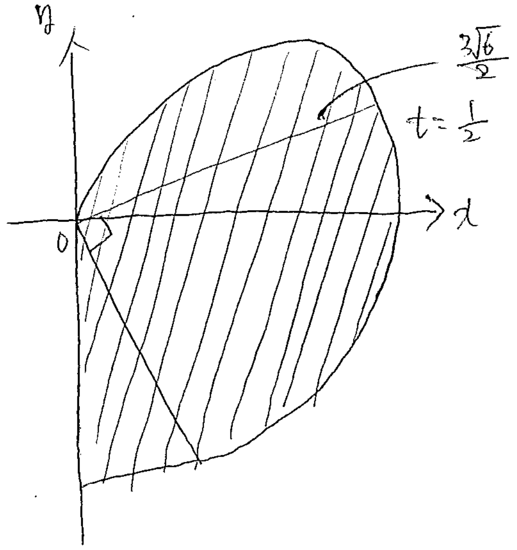
よって, $f(t)$ の最大値は

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{2}\left(1+\frac{1}{2}\right)\sqrt{5-4\cdot\frac{1}{2}} = \frac{3\sqrt{6}}{2}$$

(3) (1)より直線OPの傾き $g(t) = \dfrac{y(t)}{x(t)}$ は $-1<t\leqq 1$ において単調に減少し, 線分OPの長さ $f(t)$ は (2)のように変化するので, C, D を図示すると, 以下のようになる.



Dを時計回りに90°回転させた図は以下のようになる。



Dの通過する領域は、原点とPの距離の最大値を半径とする円の$\frac{1}{4}$と、領域Dの面積の和である。

よって、求める面積をSとすると、(2)より、

$$S=\pi\cdot\left(\frac{3}{2}\sqrt{6}\right)^2\cdot\frac{1}{4}+\int_0^{2\sqrt{2}}y(t)\,dx$$

$$=\frac{27}{8}\pi+\int_{t=-1}^{t=1}\frac{9}{2}(1+t)\sqrt{1-t^2}\,dt$$

$t=\sin\theta$と置くと、

$$\int_{-1}^{1}(1+t)\sqrt{1-t^2}\,dt=\int_{\theta=-\frac{\pi}{2}}^{\theta=\frac{\pi}{2}}(1+\sin\theta)\cdot\cos^2\theta\,d\theta$$

$$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left\{\frac{1+\cos 2\theta}{2}-\cos^2\theta(\cos\theta)'\right\}d\theta$$

$$=\left[\frac{\theta}{2}+\frac{1}{4}\sin 2\theta-\frac{1}{3}\cos^3\theta\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\frac{\pi}{2}$$

よって、$S=\frac{27}{8}\pi+\frac{9}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\underline{\underline{\frac{45}{8}\pi}}$

(1) $\{2^0, 2^1, 2^2, \cdots, 2^{n-1}\}$ から 2 個選ぶとき, より大きい方を 2^k とする.

このときの和は $2^k \cdot 2^0 + 2^k \cdot 2^1 + \cdots + 2^k \cdot 2^{k-1} = 2^k \sum_{l=0}^{k-1} 2^l$ $(k = 1, 2, \cdots, n-1)$

$$\therefore\ a_{n,2} = \sum_{k=1}^{n-1} 2^k \sum_{l=0}^{k-1} 2^l$$

$$= \sum_{k=1}^{n-1} 2^k \cdot (2^k - 1) = \sum_{k=1}^{n-1} (4^k - 2^k)$$

$$= \frac{4}{3}(4^{n-1} - 1) - 2(2^{n-1} - 1) = \underline{\frac{1}{3}4^n - 2^n + \frac{2}{3}}$$

(2) $2 \leqq k \leqq n$ として, $\{2^0, 2^1, \cdots, 2^n\}$ から k 個選ぶとき

最も大きいものを 2^l とする. $(l = 1, 2, \cdots, n)$

このときの和は $2^l a_{l,k-1}$ (これは $\{2^0, 2^1, \cdots, 2^{l-1}\}$ から $k-1$ 個選ぶため)

$1 \leqq l \leqq n$ より

$a_{n+1,k} = \sum_{l=1}^{n} 2^l a_{l,k-1}$. 同様に $a_{n,k} = \sum_{l=1}^{n-1} 2^l a_{l,k-1}$

よって $a_{n+1,k} - a_{n,k} = 2^n a_{n,k-1} \iff a_{n+1,k} = 2^n a_{n,k-1} + a_{n,k}$

また, $a_{n,n} = 2^0 \cdot 2^1 \cdot 2^2 \cdot \cdots \cdot 2^{n-1} = 2^{\frac{n(n-1)}{2}}$

$$\therefore\ f_{n+1}(x) = 1 + a_{n+1,1}x + \sum_{k=2}^{n} a_{n+1,k}x^k + a_{n+1,n+1}x^{n+1}$$

$$= 1 + (2^{n+1} - 1)x + 2^{\frac{n(n+1)}{2}}x^{n+1} + \sum_{k=2}^{n}(2^n a_{n,k-1} + a_{n,k})x^k$$

$$= \left\{1 + (2^n - 1)x + \sum_{k=2}^{n} a_{n,k}x^k\right\} + 2^n x\left(1 + \sum_{k=2}^{n} a_{n,k-1}x^{k-1} + 2^{\frac{n(n-1)}{2}}x^n\right)$$

$$= f_n(x) + 2^n x f_n(x)$$

よって $\underline{\dfrac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)} = 2^n x + 1}$

また, $\{2^0, 2^1, \cdots, 2^n\}$ から k 個選ぶとき, 2^0 を含むものの和は

$2^0 \cdot 2^{k-1} \cdot a_{n,k-1}$ となる. ($\because$ $\{2 \cdot 2^0, 2 \cdot 2^1, \cdots, 2 \cdot 2^{n-1}\}$ から k 個選んだものの積の和をとるため)

同様に, 2^0 を含まないものは, $2^k \cdot a_{n,k}$ となる.

これらより, $a_{n+1,k} = 2^{k-1}a_{n,k-1} + 2^k \cdot a_{n,k}$

$$\therefore\ f_{n+1}(x) = 1 + a_{n+1,1}x + \sum_{k=2}^{n} a_{n+1,k}x^k + a_{n+1,n+1}x^{n+1}$$

$$= 1 + (2^{n+1}-1)x + 2^{\frac{n(n+1)}{2}}x^{n+1} + \sum_{k=2}^{n}(2^{k-1}a_{n,k-1} + 2^k a_{n,k})x^k$$

$$= \left\{1 + (2^n-1)2x + \sum_{k=2}^{n} a_{n,k}(2x)^k\right\} + x\left\{1 + \sum_{k=2}^{n} a_{n,k-1}(2x)^{k-1} + 2^{\frac{n(n-1)}{2}}(2x)^n\right\}$$

$$= f_n(2x) + x f_n(2x)$$

よって $\dfrac{f_{n+1}(x)}{f_n(2x)} = \underline{1+x}$ //

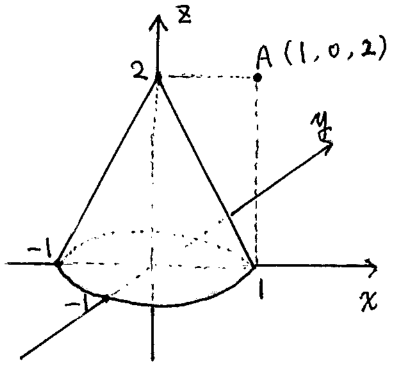
(3)　(2)より $\begin{cases} a_{n+1,k+1} = 2^n a_{n,k} + a_{n,k+1} \cdots ① \\ a_{n+1,k+1} = 2^k a_{n,k} + 2^{k+1} a_{n,k+1} \cdots ② \end{cases}$

①$\times 2^{k+1}$ − ② より

$$(2^{k+1}-1)\,a_{n+1,k+1} = (2^{n+k+1}-2^k)\,a_{n,k}$$

$$\therefore\ a_{n+1,k+1} = \frac{2^{n+1}-1}{2^{k+1}-1}\cdot 2^k$$

$$= \underline{2^k\cdot\frac{2^{n+1}-1}{2^{k+1}-1}}$$ //



(1) P(s, t, 0), APと平面 $z=1$ の交点をMとおくと,

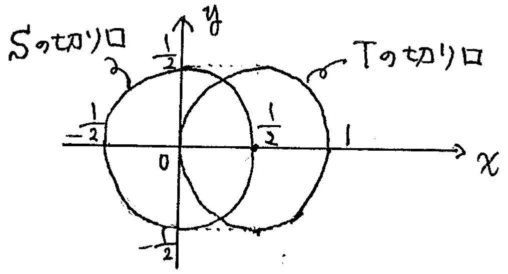
$s^2+t^2 \leqq 1$　$(s, t \in \mathbb{R})$

Mの座標は $\begin{cases} x = \frac{1+s}{2} \\ y = \frac{t}{2} \\ z = 1 \end{cases}$　(MはAPの中点)

$\therefore \begin{cases} s = 2x-1 \\ t = 2y \\ z = 1 \end{cases}$

よってMの動く領域は, $(x-\frac{1}{2})^2+y^2 \leqq \frac{1}{4}$　$(z=1)$

以上から平面 $z=1$ によるTの切り口およびSの切り口は以下



(2) 点PがSを動くとき，線分APが通過する立体をWと呼ぶ.

Wの $z=k$ $(0 \leqq k \leqq 2)$ における断面S′は

Pのz座標が $0 \leqq z \leqq k$ で動いた時の線分APと平面 $z=k$ の交点の集合で与えられる.

P(s, t, z), 線分APと平面 $z=k$ との交点をQとおくと

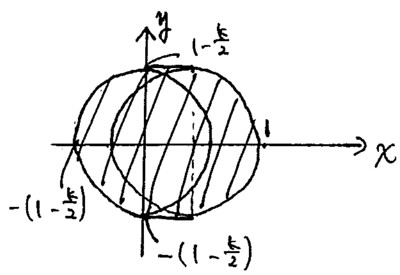
$Q\left(\frac{k-z}{2-z}+\frac{2-k}{2-z}s,\ \frac{2-k}{2-z}t,\ k\right)$ である.

$s^2+t^2 \leqq \left(1-\frac{z}{2}\right)^2$ より

$\left(x-\frac{k-z}{2-z}\right)^2+y^2 \leqq \left(1-\frac{k}{2}\right)^2$

$0 \leqq z \leqq k$ より S′は以下の斜線部のようになる

S′の面積は $\pi\left(1-\frac{k}{2}\right)^2+\frac{k}{2}\times 2\left(1-\frac{k}{2}\right)$



よって求めるWの体積は

$\int_0^2 S'\,dk$

$= \int_0^2 \pi\left(1-\frac{k}{2}\right)^2+k\left(1-\frac{k}{2}\right)dk = \pi\left[\frac{k^3}{12}-\frac{k^2}{2}+k\right]_0^2+\left[-\frac{k^3}{6}+\frac{k^2}{2}\right]_0^2$

$= \underline{\frac{2}{3}\pi+\frac{2}{3}}$ //

(1) $f(\theta)=A\sin 2\theta$ としたとき。

θ	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3}{4}\pi$	π	$\frac{5}{4}\pi$	$\frac{3}{2}\pi$	$\frac{7}{4}\pi$	2π
$f(\theta)$	0	A	0	$-A$	0	A	0	$-A$	0

$\sin\theta$ の周期性より、$-\pi<\alpha\le\pi$ として、この範囲で示せばよい。

$g(\theta)=\sin(\theta+\alpha)$ とおく。

$f(\theta)=g(\theta)$ としたとき、これが少なくとも4解を持つことを示す。

(i) $-\pi<\alpha<-\frac{\pi}{2}$ のとき

$g(\frac{\pi}{4})\le 1<A$, $g(\frac{3}{4}\pi)\ge -1>-A$, $g(\frac{5}{4}\pi)\le 1<A$,

$g(\frac{7}{4}\pi)\ge -1>-A$, $g(2\pi)<0$ より、

$\frac{\pi}{4}<\theta<\frac{3}{4}\pi$, $\frac{3}{4}\pi<\theta<\frac{5}{4}\pi$, $\frac{5}{4}\pi<\theta<\frac{7}{4}\pi$, $\frac{7}{4}\pi<\theta<2\pi$

でそれぞれ解を1つは持ち、それぞれ互いに異なるため、少なくとも4つの解を持つ。（中間値の定理より）

(ii) $-\frac{\pi}{2}\le\alpha<0$ のとき

(i)と同様の範囲で解を持つ。

(iii) $0\le\alpha<\frac{\pi}{2}$ のとき

$g(0)\ge 0$ より、$0\le\theta<\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{4}<\theta<\frac{3}{4}\pi$, $\frac{3}{4}\pi<\theta<\frac{5}{4}\pi$, $\frac{5}{4}\pi<\theta<\frac{7}{4}\pi$

においてそれぞれ解を持つ。

(iv) $\frac{\pi}{2}\le\alpha\le\pi$ のとき

(iii)と同様の範囲で解を持つ。

よって、以上より、題意は満たされる。

(2) $P(p_x, p_y)$, $Q(q_x, q_y)$ とおく.

$\frac{x^2}{2} + y^2 = 1 \rightarrow x\,dx + 2y\,dy = 0$

Qにおける C の接線の方向は $(2q_y, -q_x)$ とすることができ、

これを $\vec{l}$ とおく. ここで, Pは $\frac{x^2}{2} + y^2 < 1$ に含まれているため,

$P \neq Q$, また $Q \neq O$ より, $\vec{l} \neq \vec{0}$

よって、(直交条件) $\iff \vec{l} \cdot \overrightarrow{PQ} = 0$

$\iff 2q_y(q_x - p_x) - q_x(q_y - p_y) = 0$

$\iff (q_x - 2p_x)(q_y + p_y) = -2p_x p_y$

よって、条件を満たす点Qが4つ存在することは次と同値になる.

「$\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$, $(x - 2p_x)(y + p_y) = -2p_x p_y$ は4解を持つ」 …(＊)

$\begin{cases} p_x = \frac{a}{\sqrt{2}}\cos\varphi \\ p_y = a\sin\varphi \end{cases}$ $(0 \leq a < r)$, $\begin{cases} x = \sqrt{2}\cos\theta \\ y = \sin\theta \end{cases}$ $(0 \leq \theta < 2\pi)$ とおく.

(＊) $\iff$ θの方程式「$(\sqrt{2}\cos\theta - \sqrt{2}a\cos\varphi)(\sin\theta + a\sin\varphi)$

$= -\sqrt{2}a^2\cos\varphi\sin\varphi$」が4解を持つ.

$\iff$ θの方程式「$\sin 2\theta = 2a\sin(\theta - \varphi)$」が4解を持つ.

ここで, $a = 0$ のとき, $P(0, 0)$ となり, $Q(0, \pm 1)$, $(\pm\sqrt{2}, 0)$ より,

条件を満たす.

$a \neq 0$ として, $0 < a < r$, この下で

(条件) $\iff$ 任意の a が(＊)を満たす

となる. ここで, $\frac{1}{2a}\sin 2\theta - \sin(\theta - \varphi) = 0$, $\frac{1}{2a} > 1 \iff a < \frac{1}{2}$

のとき, 条件は満たされる. よって, $r = \frac{1}{2}$ は条件を満たす.

(2) ここで、$r > \frac{1}{2}$ のとき、$a = \frac{1}{2}$ をとれるが、このとき $\sin 2\theta = \sin\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)$ は、3解しか持たない、よって、この範囲で任意の a が (＊) を満たすことはなく、条件を満たす r の最大値は $\frac{1}{2}$ となる